

Zusatzaufgaben mit * gekennzeichnet

Übungen Mathematik IIIA 27.10.10 Abgabe: 11.11.10

Fourier- und LaPlace - Transformation II (18+20 Punkte)

1. Betrachten Sie nochmals die Fourierreihenentwicklung der Funktion (Vorlesung!)

$$f(t) = -1 + \frac{2t}{T} \quad \text{für } 0 \leq t < T \quad \text{und} \quad f(t) = f(t + T)$$

- (a) Zeigen Sie, dass sich hieraus eine Methode gewinnen läßt, $\frac{\pi}{4}$ durch eine unendliche Reihe zu berechnen. (**2 Punkte**)
- (b) Berechnen Sie als Näherungswert die Summe der ersten 10 nicht verschwindenden Summanden der Reihe. (**2 Punkte**)

2. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{a}{2} \leq |x| < L - \frac{a}{2} \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x) = f(x + L)$$

- (a) Skizzieren Sie die Funktion. (**2 Punkte**) Die Funktion beschreibt z. B. das Transmissionsverhalten eines optischen Gitters mit der Spaltbreite a und der Gitterkonstante L ($L = "g"$). Für $x = t$ und $L = T$ beschreibt die Funktion ein Rechtecksignal mit dem "Tastverhältnis" $\frac{a}{T}$.
- (b) Stellen Sie die Fourierreihe in einer von Ihnen gewählten Form auf. (**2 Punkte**)
- (c) Geben Sie für $\frac{a}{L} = \frac{2}{10}$ die mittlere quadratische Abweichung σ_N^2 der endlichen Reihe von der Funktion für $N = 0, 1, 2$ und $N = 3$ an. (**2 Punkte**)

3. *Gegeben ist die Funktion

$$f(t) = \left(\frac{2t}{T}\right)^2 \quad \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \quad \text{und} \quad f(t) = f(t + T)$$

- (a) Berechnen Sie die Fourierreihe in der komplexen Darstellung. (**2 Punkte**)
- (b) Überführen Sie die komplexe Reihe in eine reelle Darstellung. (**1 Punkt**)
- (c) Geben Sie den Funktionsausdruck für eine Verschiebung um $\frac{T}{2}$ an und berechnen Sie mit Hilfe des 1. Verschiebungssatzes die neuen Fourierkoeffizienten (c_n und $a_n!$). (**2 Punkte**)
- (d) Skizzieren Sie alle Spektren und die Funktionsgraphen. (**2 Punkte**)

4. Welchen Wert besitzen (**2 Punkte**)

$$\int_{-1}^{+1} \delta(x) [(x-1)f(x) - f(0)] dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} \delta(x - \frac{\pi}{2}) dx \quad ?$$

5. Zeigen Sie durch Fouriertransformationen der rechten und linken Seite der Identität

$$\cos \omega_0 t = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right) \cos \omega_0 t,$$

daß

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(xT)}{x} = \pi \delta(x)$$

gilt. (**2 Punkte**)

6. * Beweisen Sie, dass für das Faltungsprodukt das Assoziativgesetz, also

$$f(t) \otimes (g(t) \otimes h(t)) = (f(t) \otimes g(t)) \otimes h(t)$$

gültig ist. (**2 Punkte**)

7. Verifizieren Sie den Faltungssatz am Beispiel der Faltung einer Rechteckfunktion mit sich selbst. (**2 Punkte**)

8. * Berechnen Sie die Laplace-Transformierte jeweils für folgende kausale Funktionen: (**6 Punkte**)

$$\begin{aligned} a) \quad f(t) &= \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq t_1 \\ 1 & \text{für } t_1 \leq t < t_2 \\ 0 & \text{für } t_2 \leq t \end{cases} \\ b) \quad f(t) &= \begin{cases} \frac{t}{\tau} & \text{für } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{für } \tau \leq t \end{cases} \\ c) \quad f(t) &= \begin{cases} \sin \omega t & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{T}{2} < t \end{cases} \end{aligned}$$

9. Wie lauten die Originalfunktionen zu (**2 Punkte**)

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s+2}; \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 8}$$

10. *Ermitteln Sie mit Hilfe des Differenziationssatzes der Bildfunktion und anschließender Partialbruchzerlegung die Originalfunktion zu (**5 Punkte**)

$$F(s) = \ln \left(1 + \frac{1}{s^2} \right)$$