

Zusatzaufgaben (Tutorien) mit \* gekennzeichnet

**Übungen Mathematik IIA/B 9.4.10 Abgabe: 16.4.10**

**3.5 Fortgeschrittene Reihen (8+4 Punkte)**

1. Oszillatoren können nur ganzzahlige Vielfache eines kleinsten Energiequantums  $E_0 = \hbar\omega$  aufnehmen oder abgeben, also eine Energie von  $E = nE_0$  haben. Die statistische Wahrscheinlichkeit für das Auftreten solch einer Energie ist gegeben durch die Temperatur

$$w(n) = Ce^{-\frac{E}{kT}}.$$

Bestimmen Sie die Konstante  $C$  so, daß für die Wahrscheinlichkeit gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} w(n) = 1$ . Mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeit berechnen Sie die mittlere Energie  $\sum Ew$  eines Oszillators. Benutzen Sie Differentiation oder Integration von bekannten Reihen, um die Summe zu berechnen. **(4 Punkte)**

2. Berechnen Sie die Taylorreihen für folgende Funktionen **(2+2 Punkte)**

$$\ln(x^2 - 1); \quad * \arctan(\sqrt{x - 1})$$

indem Sie die Reihe der Ableitungen nutzen.

3. Geben Sie eine Reihenentwicklung für den Integralsinus und die Fresnel-S-Funktion an **(2+2 Punkte)**

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx; \quad * \int_0^t \sin(x^2) dx.$$

**Differentialrechnung in  $R^n$  (6+4 Punkte)**

1. Stellen Sie die Gleichungen für die Tangentialebenen an die Flächen **(2+2 Punkte)**

$$\begin{aligned} z &= 2x^2 - 4y^2 && \text{im Punkt } (2, 1, 4) \\ *x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 &= 0 && \text{im Punkt } (1, 2, -1) \end{aligned}$$

auf.

2. Bestimmen Sie den größten Anstieg der Flächen **(2+2 Punkte)**

$$\begin{aligned} z &= \ln(x^2 + 4y^2) && \text{im Punkt } (6, 4, \ln 100) \\ *z &= x^y && \text{im Punkt } (2, 2, 4) \end{aligned}$$

3. In welcher Richtung ändert sich die Funktion **(2 Punkte)**

$$\psi(x, y, z) = x \sin z - y \cos z$$

im Koordinatenursprung am stärksten?