

Zusatzaufgaben (Tutorien) mit * gekennzeichnet

Übungen Mathematik IIA/B 11.6.10 Abgabe: 18.6.10

Differentialgleichungen (23+13 Punkte)

1. Bestimmen Sie die Differentialgleichungen folgender Kurvenscharen (**2+2 Punkte**)

$$y = C^2 + (x - C)^2 \quad y = Cx - C^2$$
$$*y = C_1x + C_2x^{-2} \quad * \frac{x^2}{4-C} + \frac{y^3}{3-C} = 1$$

2. Zeichnen Sie die Isoklinen $y' = 0; \pm 1, \pm 2, \pm 3$ der DGL $y' = y$ und skizzieren Sie den auf Grund des Richtungsfeldes zu erwartenden Lösungsverlauf. Lösen Sie die DGL nach geeigneter Substitution durch Trennung der Variablen. (**2 Punkte**)

3. Berechnen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden DGLen: (**10+4 Punkte**)

$$y' + y = e^x; \quad xy' + y = x$$
$$xy' + y = \cos x; \quad *y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{\cos^2 x}$$
$$y' + y \cot x = \sin x; \quad *xy' + y = 1 + \ln x$$
$$y' - \frac{2y}{x} = -2x^2(1 + \ln x);$$

4. Auf einem Bahnhof seien in den frühen Morgenstunden keine Fahrgäste. Mit Einsetzen des Berufsverkehrs sollen im Mittel konstant n Fahrgäste pro Zeiteinheit eintreffen. Von den N sich im Bahnhof aufhaltenden Personen verlasse pro Zeiteinheit ein Bruchteil p den Bahnhof mit weiterführenden Zügen, ein Bruchteil q , um mit Bussen weiterzufahren. Bestimmen Sie (inklusive Skizze!) $N = N(t)$. (**3 Punkte**)

5. *Der radioaktive Zerfall von Mutter- und Tochtersubstanz wird durch die DGLen

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda_A \cdot A \quad \text{und} \quad \frac{dB}{dt} = -\lambda_B \cdot B + \lambda_A \cdot A$$

beschrieben (A, B Anzahl der Atome von Mutter- und Tochtersubstanz zum Zeitpunkt t). Lösen Sie die erste DGL unter der Bedingung $A(0) = A_0$, setzen Sie die Lösung in die zweite DGL ein und lösen Sie diese unter der Bedingung $B(0) = 0$. Zu welcher Zeit erreicht B ein Maximum? (**3 Punkte**)

6. Geben Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden DGLen an: (**6+4 Punkte**)

$$(x^2 + y)dx - xdy = 0; \quad y' = \frac{1+y^2}{y(1+x^2)}; \quad *y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$$
$$*x^2 + y^2 + 2x + 2yy' = 0; \quad \frac{y^2}{x} + (y^3 - \ln x)yy' = 0$$

Hinweis zu den letzten beiden Aufgaben: Versuchen Sie einen integrierenden Faktor zu finden (die DGLen sind nicht linear!).