Fachbereich Physikalische Technik
Prof. Dr. Klaus Morawetz

Zusatzaufgaben (Tutorien) mit * gekennzeichnet

Übungen Mathematik IA 6.10.11 Abgabe: 13.10.11

1.1 Mengenlehre, 1.2 Logik (12+11 Punkte)

1. 30 Personen unterhalten sich über ihre Urlaubsreisen. 8 Personen waren nicht in Italien,13 Personen waren nicht in England, 8 Personen waren nicht in Frankreich, 4 Personen waren weder in Italien noch in England, 3 Personen waren weder in Italien noch in Frankreich, 5 Personen waren weder in England noch in Frankreich, in keinem der Länder war eine Person. Wieviele Personen waren in allen 3 Ländern? Veranschaulichen Sie die Lösung durch ein Venn - Diagramm. (**4 Punkte**)

2. Zeigen oder widerlegen Sie mit Hilfe von logischen Funktionen oder Venn Diagrammen (**3 mal 2 Punkte**) :

$$\begin{aligned} x &\in A \cap B \subset A \Longrightarrow x \in A \backslash B \\ x &\in A \cap B \Longrightarrow x \notin (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\ (*)(x &\in A \vee x \in B) \wedge x \notin A \cap B \Longrightarrow x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B) \end{aligned}$$

3. Zeigen Sie mit Hilfe von logischen Verknüpfungen oder Venn Diagrammen die Allgemeingültigkeit von: (**5 mal 2 Punkte**)

$$\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{r} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{array}\right\} & Assoziativgesetze \\ \left.\begin{array}{r} (*)(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ (*)(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{array}\right\} & Distributivgesetze \\ (*)\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} & De-Morgansche\ Gesetze \end{array}$$

4. *Drei Königsöhne bewarben sich um eine wunderschöne Prinzessin. Der Vater wollte sie aber nur dem Klügsten zur Frau geben. Deshalb stellte er ihnen folgende Aufgabe: Jedem würde er einen gelben oder blauen Punkt auf die Stirn machen mit verbundenen Augen. Das Einzige, was sie wüßten ist, daß mindestens ein blauer Punkt dabei wäre. Wer nach dem Entfernen der Augenbinden als erster richtig seine Farbe sagt, bekäme die Prinzessin. Als die Prinzen sich ansahen, herrschte eine ganze Weile Stille. Dann stand einer auf und sagte die richtige Farbe. Welche Farbe hatte er und welche Farben sah er bei den anderen beiden Prinzen? (**3 Punkte**)

1.3 Komplexe Zahlen (12+7 Punkte)

1. Stellen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Normalform her (**4 Punkte**):

$$4 + i - 3(2 - 4i) + (2 + 3i)(3 + i) - (1 + 2i)(3 - 7i)^2 + 6 - 16i$$
$$\tfrac{(3+2i)^2}{-i}, \quad (\tfrac{2-3i}{1+i})^2 + 4 - 5i, \quad (\tfrac{3-i}{1-i} + i)^2$$

2. (*) Stellen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Normalform her (**3 Punkte**):

$$\tfrac{(2+3i)(-2-i)}{(3+i)(4-4i)}; \quad \tfrac{(3+2i)^2}{-i}; \quad \tfrac{(2-5i)^2}{(1+i)^3};$$

3. Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinatenform an (**5 Punkte**):

$$-4, \quad -1 + i\sqrt{3}, \quad 1 - i, \quad 5i, \quad (1 + i)(1 - i)$$

4. (*) Berechnen Sie Betrag und Argument folgender Zahlen (**2 Punkte**):

$$-\tfrac{1-i}{3i+(i-1)^2}; \quad \tfrac{(1-i)^2}{1+i}$$

5. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichungen, indem Sie die komplexen Zahlen in der Normalform $z = x + iy$ ansetzen und entsprechend umformen (**3+2 Punkte**):

$$\overline{t_1 z_1 + t_2 z_2} = t_1 \overline{z_1} + t_2 \overline{z_2} \quad \text{mit} \quad t_1, t_2 \in R; \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
$$*\overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}; \qquad \overline{z_1 : z_2} = \overline{z_1} : \overline{z_2}; \quad *|z_1 * z_2| = |z_1| * |z_2|$$