

Zusatzaufgaben (Tutorien) mit * gekennzeichnet

Übungen Mathematik IA/B 6.1.10 Abgabe: 14.1.10

Integralrechnung (16+10 Punkte)

1. Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale bzw. deren Hauptwerte, sofern sie existieren. (4 + 4 Punkte)

$$\int_{-2}^{+2} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x+1}; \quad * \int_2^{\infty} \frac{\ln x dx}{x}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2+1};$$
$$* \int_0^{\infty} e^{-x} \sin 5x dx; \quad * \int_0^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}; \quad \int_0^{\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}; \quad * \int_0^{\pi} \cot x dx$$

2. Welche Flächeninhalte schließen die angegebenen Kurven jeweils miteinander ein (Skizzen!) (2 + 2 Punkte)?

a) $y = 1 - x^2, y = x^2 - 2x$; b) $x = 0, y^2 = 4 - 2x$;
*c) $x = 0, y = 1, y = 4, xy = 4$ *d) $y = 0, y = x^3 - 4x$

3. Berechnen Sie die Kraft F , mit der das Wasser in einem Aquarium gegen seine Wände drückt. Die vom Wasser berührte Wandfläche sei rechteckig mit der Breite a und der Höhe b . In welcher Tiefe muß eine horizontale Gerade verlaufen, so dass die Kräfte auf die entstehenden Teilflächen gleich groß sind? (Zerlegen Sie hierzu die Fläche in n gleiche waagrechte Streifen, in denen Sie den Druck als konstant ansehen können. Bilden Sie das Integral als Grenzwert der Summe aller Teilkräfte.) (2 Punkte)
4. Bestimmen Sie die Bogenlängen der jeweiligen Kurven in den angegebenen Intervallen (4 + 4 Punkte):

a) $y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ mit $x \in [0, 4]$; b) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ mit $x \in [1, 2]$

*c) $\begin{matrix} x = t^2 \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{matrix}$ mit $t \in [0, 4]$ *d) $\begin{matrix} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{matrix}$ mit $t \in [0, 3]$

IB Lin. Gleichungssysteme (4 Punkte)

1. Untersuchen Sie das Gleichungssystem

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -11 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und das zugehörige homogene Gleichungssystem jeweils auf ihre Lösbarkeit (2 Punkte) und geben Sie ggf. nichttriviale Lösungen an (2 Punkte).