Fachbereich Physikalische Technik
Prof. Dr. Klaus Morawetz

Zusatzaufgaben (Tutorien) mit * gekennzeichnet

Übungen Mathematik IA/B 28.10.10 Abgabe: 11.11.10

IA Zahlenfolgen und Reihen, Grenzwerte, Funktionen (20+10 Punkte)

1. Überprüfen Sie die Konvergenz der Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit Gliedern a_n (**6+3 Punkte**):

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}; & \frac{1}{3n+(-1)^n n}; & \frac{n!3^n}{n^n}; \\ \frac{n!2^n}{n^n}; & \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}; & \frac{n^2}{2^n+3^n}; \\ *\frac{1}{n(n+1)(n+2)}; & *\frac{n^2+2}{n}; & *\frac{n+1}{(n+3)!} \end{array}$$

2. Bestimmen Sie für die folgenden reellen Funktionen den Definitions- und Wertebereich und zeichnen Sie die Graphen (**6+3 Punkte**):

$$\begin{aligned} a)\ y &= -\sqrt{36-x^2};\quad b)\ y = |3x-2|\,;\quad c)\ y = -\sqrt{25-x^2} \\ d)\ y &= 1+\sin x;\quad e)\ y = 2\cos 2x + 2\sin^2 x;\quad f)\ y = 1+\sin 2x; \\ *g) y &= \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x;\quad *\,h)\ y = \sqrt{-3x};\qquad *\,i) y = 2\,|x| - x; \end{aligned}$$

3. Es sei $f(x) = \arctan x$. Bestimmen Sie Werte- und Definitionsbereich für $|f(x)|, f(|x|), f(1/x), 1/f(x)$ und skizzieren Sie die Funktionen. (**4 Punkte**):

4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (**4+4 Punkte**):

$$\begin{array}{llll} \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{4x^5-x^3}{4x^2-1} & \lim\limits_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} & \lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) & \lim\limits_{a\to 3} \frac{a-3}{a^2-2a-3} \\ *\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} & *\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1} & *\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} & *\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x} - x \end{array}$$

5. Geben Sie die Gleichungen $y = f^{-1}(x)$ für die Umkehrfunktionen an und zeichnen Sie diese zusammen mit der entsprechenden Ausgangsfunktion f jeweils in ein Diagramm: (**2 Punkte**):

$$y = 2e^{-x^2};\quad y = \ln \frac{1+x}{x}$$

IB Vektoren (6 Punkte)

1. Beweisen Sie die Lagrange Identität(**2 Punkte**):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}).$$

2. Bestimmen Sie die Gerade (**4 Punkte**):

   (a) durch die Punkte $P(-2,1,3)$ und $Q(2,-3,5)$,

   (b) durch den Punkt $P(3,1,2)$ parallel zur Geraden $(y+4) = \frac{z-1}{2}, x = 3$,

   (c) durch den Ursprung, die die Gerade $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ orthogonal schneidet,

   (d) durch den Ursprung, die die Verbindungsgerade durch die Punkte $P(0,-1,4)$ und $Q(2,3,-2)$ orthogonal schneidet.