

УДК 593.3

А.Е. Мирошниченко

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАЛЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В СТРУКТУРНОЙ СРЕДЕ

Необходимость учёта эффектов, обусловленных структурной неоднородностью деформируемых систем, требует разработки обобщенных моделей, уточняющих классические. В микрополярной теории упругости (модель Коссера) наряду с полем перемещений вводится поле вращений, а для описания напряжённого состояния используются дополнительные моментные напряжения. Учёт структуры позволяет моделировать важные механические эффекты: явления пограничного слоя, масштабный эффект, снижение коэффициента концентрации напряжений включений малого радиуса и т.д. [1, 2].

Отметим задачу о "сверхглубоком" проникании твердых микрочастиц в твердые материалы [3, 4], при котором разогнанные частицы порошка из твердых веществ проникают внутрь металлической мишени на глубины, превышающие диаметры частиц на два-три порядка. Канал, по которому проходит частица, на всём протяжении оказывается почти полностью схлопнувшимся. Внедрённые таким образом частицы являются источниками концентрации напряжений малых размеров. В [5] предложен вариант дискретной структурной модели, моделируются эффекты динамики внедрения. Задача нахождения статического НДС и энергии внедрения сферической частицы малого радиуса в полупространство на основе модели классической теории упругости аналитически решается в работе [6].

В настоящей статье задача внедрения включения в плоском случае исследуется на основе обобщенной дискретной моментной модели структурной среды, реализующей конечно-элементную балочную модель с учетом сопротивления элементов продольной деформации и изгибу. Уравнения для ком-

понент перемещений $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ и поворотов $\omega_{i,j}$ внутренних узлов системы такой модели имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1 \Delta_{xx}^2 u + a_2 (\Delta_{yy}^2 u + \Delta_y \omega_{i,j}) + F_{i,j}^x &= 0, \\ a_1 \Delta_{yy}^2 v + a_2 (\Delta_{xx}^2 v - \Delta_x \omega_{i,j}) + F_{i,j}^y &= 0, \\ a_3 (\Delta_{xx}^2 \omega + \Delta_{yy}^2 \omega) - a_2 (\Delta_x v - \omega_{i,j}) + a_2 (\Delta_y u + \omega_{i,j}) + F_{i,j}^\omega &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $a_1 = AEL$, $a_2 = 12EI/L$, $a_3 = 2EIL$, L - длина, A - площадь поперечного сечения, I - момент инерции, E - модуль Юнга элементов,

$$\begin{aligned} \Delta_{xx}^2 w &= (w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j})/L^2, & \Delta_x w &= (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})/2L, \\ \Delta_{yy}^2 w &= (w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1})/L^2, & \Delta_y w &= (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})/2L. \end{aligned}$$

Отметим, что такая модель представляет интерес для моделирования не только решетчатых конструкций, но и структурных материалов, для описания кинематики элементарных ячеек которых важными являются не только пространственные перемещения, но повороты ячеек (биоматериалы, гранулированные среды, композиты, рис. 1).

На основе программ, реализующих конечно-элементный алгоритм, численно решались задачи нахождения и анализа напряженно деформируемого состояния и энергии деформированной среды в зависимости от глубины расположения включений. Включения моделировались как пара приложенных к соседним узлам решетки сил параллельных и перпендикулярных поверхности. Первая модель представляет интерес при моделировании внедрения включения в среду перпендикулярно поверхности, вторая как модель продвижения включения вдоль поверхности на различных глубинах (резание). Найденные характерные зависимости энергии внедрения от глубины представлены на рис. 2 (квадраты и крестики соответственно). Выделим осо-

бенности: наличие граничного этапа внедрения, этапа продвижения в приповерхностном слое, стационарного этапа при достаточно глубоком внедрении.

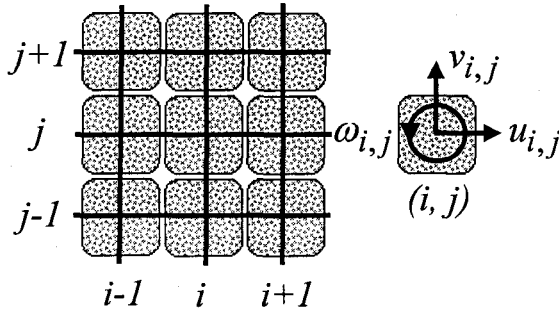


Рис. 1.

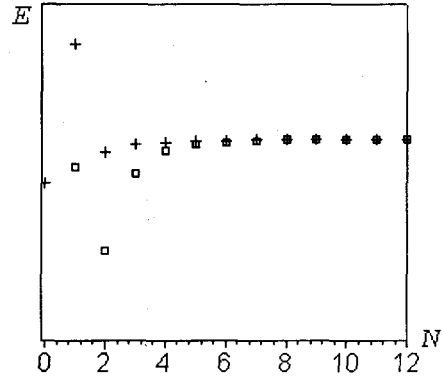
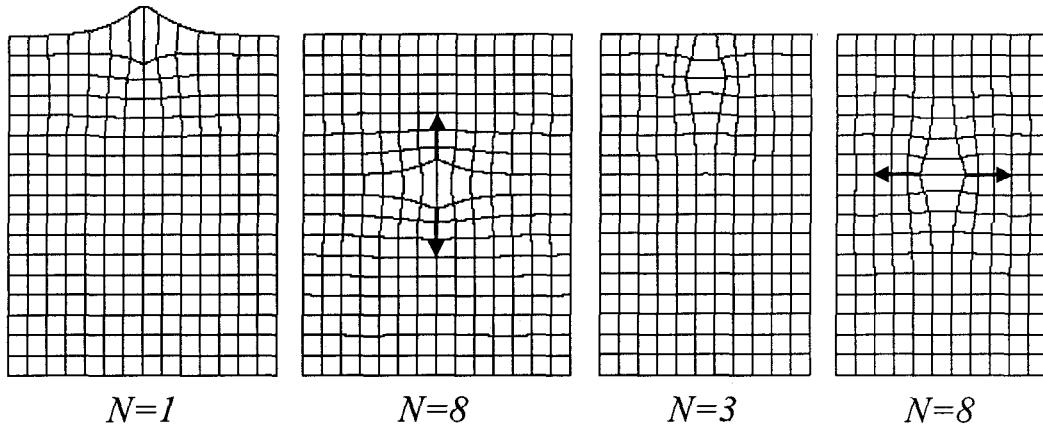


Рис. 2.

Характерные картины деформированного состояния приведены на рисунках:



Представляется интересным рассмотреть предельный континуальный вариант моментной модели (1) при $L \rightarrow 0$. В пространственном случае таким аналогом является микрополярная среда [2] с центром расширения сжатия, расположенным в точке $\vec{r}_0 = \{0, 0, h\}$. Центр расширения-сжатия моделирует включение малого радиуса. Уравнения статики имеют вид:

$$\begin{cases} (\mu + \alpha)\Delta\vec{u} + (\lambda + \mu - \alpha)\vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + 2\alpha\vec{\nabla} \times \vec{\omega} = -D\vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ (\gamma + \varepsilon)\Delta\vec{\omega} + (\beta + \gamma - \varepsilon)\vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} - 4\alpha\vec{\omega} + 2\alpha\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

где λ, μ - параметры Ляме, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ - новые упругие постоянные.

Найдем поля перемещений \vec{u} и вращений $\vec{\omega}$.

Применив к (2) преобразование Фурье

$$\bar{U} = \iiint \bar{u} e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r})} d\bar{r}, \quad \bar{\Omega} = \iiint \bar{\omega} e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r})} d\bar{r},$$

где $\bar{k} = \{\xi, \zeta, \eta\}$, придем к системе

$$\begin{cases} (\mu + \alpha)k^2 \bar{U} + (\lambda + \mu - \alpha)\bar{k}(\bar{k} \cdot \bar{U}) + 2\alpha i[\bar{k} \times \bar{\Omega}] = -Di \bar{k} e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r}_0)} \\ ((\gamma + \varepsilon)k^2 + 4\alpha)\bar{\Omega} + (\beta + \gamma - \varepsilon)\bar{k}(\bar{k} \cdot \bar{\Omega}) + 2\alpha i[\bar{k} \times \bar{U}] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Умножив оба уравнения (3) скалярно на \bar{k} , получим соотношения

$$(\bar{k} \cdot \bar{U}) = -\frac{iD e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r}_0)}}{\lambda + 2\mu}, \quad (\bar{k} \cdot \bar{\Omega}) = 0, \quad (4)$$

умножив векторно, получим

$$[\bar{k} \times \bar{U}] = \frac{2\alpha i}{\mu + \alpha} \bar{\Omega}, \quad [\bar{k} \times \bar{\Omega}] = \frac{2\alpha i}{(\gamma + \varepsilon)k^2 + 4\alpha} \left(k^2 \bar{U} + \frac{iD e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r}_0)}}{\lambda + 2\mu} \bar{k} \right). \quad (5)$$

Подставив соотношения (4) и (5) в уравнения (3), приходим к выражениям для компонент \bar{U} и $\bar{\Omega}$:

$$\bar{U} = -\frac{iD \bar{k} e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r}_0)}}{(\lambda + 2\mu)k^2}, \quad \bar{\Omega} = 0. \quad (6)$$

Применив к (6) обратное преобразование Фурье

$$\bar{u} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \bar{U} e^{-i(\bar{k} \cdot \bar{r})} d\bar{r}, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \bar{\Omega} e^{-i(\bar{k} \cdot \bar{r})} d\bar{r}, \quad (7)$$

находим значения компонент полей перемещения и вращения

$$\bar{u} = -\frac{D}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\bar{r} - \bar{r}_0}{R_1^3}, \quad \bar{\omega} = 0, \quad R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}. \quad (8)$$

Построенное решение (8) показывает, что в рассматриваемом предельном случае континуальной моментной среды поле вращений отсутствует, а

поле перемещений совпадает с классическим. Моментность НДС, наличие вращений в рассмотренном случае является особенностью, обусловленной дискретностью системы и модели (1). Из приведенных выше выкладок можно видеть, что полученный результат ($\vec{\omega} = 0$) для микрополярной модели определяется, в частности, спецификой рассматриваемых сил. Проведение аналогичных выкладок для полупространства так же приводят к НДС и энергии внедрения, построенным на основе классической упругости в [6]. Решение (8) и выражение для энергии [6] могут использоваться для оценок и начальных приближений при малой дискретности, а знание области локализации перемещений около включения для оптимального выбора расчетной области, сокращения времени и ресурсов, необходимых при численном моделировании.

Таким образом, в статье представлена моментная решеточная модель структурной среды с учетом вращения элементов (узлов). На основе вычислительных экспериментов выявлены характерные особенности квазистатического процесса внедрения, зависимость энергии внедрения от глубины для включений малого размера. Аналитически рассмотрен предельный случай - континуальная микрополярная среда с центром расширения-сжатия.

Список литературы

1. *Ильюшин А.А., Ломакин В.А.* // Сб. Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С. 54-61.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. *Григорян С.С.* // ДАН. 1987. Т. 292. № 6. С.1319.
4. *Черный Г.Г.* // ДАН. 1987. Т. 292. № 6. С.1324.
5. *Морозов Н.Ф., Паукишто М.В.* Дискретные и гибридные модели механики разрушения. Изд-во СПбГУ, 1995.
6. *Федянин В.К.* // ДАН. 1965. Т. 164. № 6. С. 1253.