

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕТЧАТЫХ СТРУКТУРНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ И КОНТИНУАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МОМЕНТНОГО ТИПА

А.Е.Мирошниченко, А.А.Васильев

Тверской государственной университет

На базе дискретной модели нагруженной стержневой системы найдены ее эффективные характеристики, для анализа медленноизменяющихся полей построен вариант континуальной модели моментного типа. Для системы найдены коротковолновые структурные решения, представлен метод уточнения континуальной модели для их моделирования. Вычислительными экспериментами выявлены характерные эффекты квазистатического внедрения включения в решетку.

В статье рассматриваются задачи моделирования регулярной плоской решетчатой стержневой системы (рис. 1), составленной из жестко соединенных в узлах стержней, с учетом их сжатия и изгиба, а также малых дополнительных докритических напряжений в элементах механического или теплового происхождения. Такая модель представляет интерес для моделирования не только балочных конструкций, но и структурных материалов - биоматериалов, гранулированных сред, композитов (рис. 2).

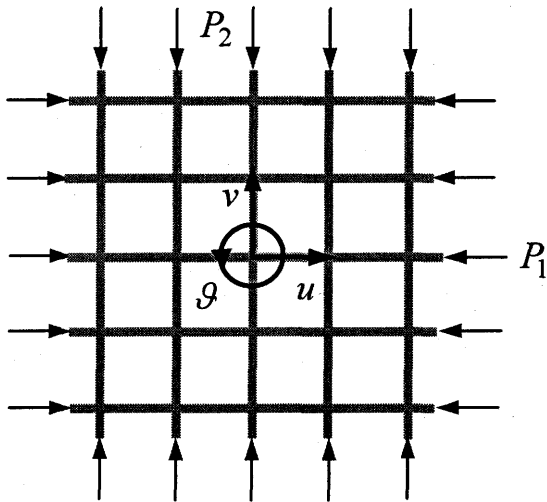


Рис. 1.

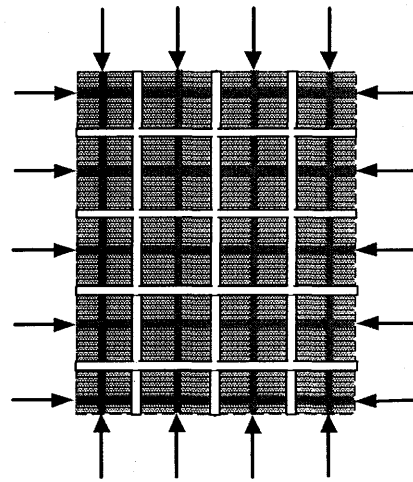


Рис. 2.

В дискретной конечно-элементной модели для элемента системы учитываем: потенциальную энергию продольной деформации и изгиба элементов

$$E_{пот.} = \frac{1}{2} \int_0^L SE \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (1)$$

работу сил P при изменении длины ΔL элемента

$$E_P = -P\Delta L, \quad \Delta L = L - \int_0^L \left[1 - \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx \approx \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx, \quad (2)$$

кинетическую энергию элемента без учета инерции поперечных сечений

$$E_{кин.} = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dx. \quad (3)$$

Выражения (1-3) приведены в локальной системе координат с использованием стандартных обозначений: L - длина, S - площадь поперечного сечения, I - момент инерции, E - модуль Юнга, ρ - плотность материала элемента.

Для аппроксимации внутренних смещений в локальной системе координат используются полиномиальные выражения

$$u(x) = u_0(1 - \xi) + u_1\xi, \quad \xi = x/L, \quad (4)$$

$$v(x) = v_0 + \xi^2(3 - 2\xi)(v_1 - v_0) + \xi(1 - \xi)L[(1 - \xi)\vartheta_0 - \xi\vartheta_1],$$

где $\{u_i, v_i\}$ - перемещения, а ϑ_i - углы поворотов граничных узлов.

При такой аппроксимации после подстановки (4) в (1), (2) в глобальной системе координат имеем выражения

$$E_{пот.} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{EA}{L} k_1^2 + \frac{4EI}{L} k_2 + \frac{12EI}{L^2} k_4 + \frac{12EI}{L^3} k_3^2 \right\}, \quad (5)$$

$$E_P = \frac{-P}{2} \left\{ \frac{L}{15}(k_2 + k_5) + \frac{1}{5}k_4 + \frac{6}{5L}k_3^2 \right\}, \quad (6)$$

где $k_1 = (v_0 - v_1)\sin\varphi + (u_0 - u_1)\cos\varphi$, $k_2 = (\vartheta_0 - \vartheta_1)^2 + 3\vartheta_0\vartheta_1$,
 $k_3 = -(u_0 - u_1)\sin\varphi + (v_0 - v_1)\cos\varphi$, $k_4 = (\vartheta_0 + \vartheta_1)k_3$, $k_5 = (\vartheta_0 - \vartheta_1)^2$.
 φ - угол наклона элемента (угол между осью Ox и элементом в направлении от узла 0 к узлу 1).

Полная энергия системы складывается из энергий всех элементов системы.

Континуальная модель строится при предположении, что поля перемещений и вращений изменяются медленно. Тогда аналогично [2], используя члены разложения в ряды Тейлора не выше первого порядка, на основе представительной ячейки из стержней $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ получаем выражение плотности энергии

$$E = \frac{1}{2} \left[a_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + a_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + a_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \vartheta \right)^2 + a_4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \vartheta \right)^2 + \right.$$

$$+ a_5 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + a_6 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + a_7 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + a_8 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (7)$$

и, таким образом, находим выражения для эффективных характеристик континуальной модели

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A_1 E_1}{L_2}, & a_2 &= \frac{A_2 E_2}{L_1}, & a_7 &= -\frac{P_1}{L_2}, & a_8 &= -\frac{P_2}{L_1}, \\ a_3 &= \frac{12 E_2 I_2}{L_1 L_2^2} - \frac{P_2}{5 L_1}, & a_4 &= \frac{12 E_1 I_1}{L_2 L_1^2} - \frac{P_1}{5 L_2}, & & & & \\ a_5 &= \frac{12 E_1 I_1}{L_2} - \frac{2 P_1 L_1^2}{15 L_2}, & a_6 &= \frac{12 E_2 I_2}{L_1} - \frac{2 P_2 L_2^2}{15 L_1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Введение обозначений для макродеформаций, микродеформаций и градиентов вращений

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} - \vartheta, \quad \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \vartheta, \quad \phi_x = \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad \phi_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}. \quad (10)$$

приводит к выражению энергии

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \left[a_1 e_{xx}^2 + a_2 e_{yy}^2 + a_3 \gamma_{yx}^2 + a_4 \gamma_{xy}^2 + a_5 \phi_x^2 + a_6 \phi_y^2 + \right. \\ &\quad \left. + a_7 (\gamma_{xy} + \vartheta)^2 + a_8 (\gamma_{yx} - \vartheta)^2 \right], \end{aligned} \quad (11)$$

соответствующему при $P_k = 0$ выражению энергии модели микрополярной упругости [1].

Анализ модели. Модель (7, 8) дополняет модель Сана-Янга [2] в плане учёта дополнительных напряжений. Известны и другие разработки этой модели, связанные с рассмотрением трехмерных решеток [3], уточнением дискретной модели более точным учётом динамики при исключении внутренних степеней свободы элементов [4]. Представленное в статье введение в модель дополнительных напряжений обусловлено необходимостью их учёта для моделирования и анализа динамики и устойчивости сред при наличии дополнительных напряжений механического, теплового, химического и т.д. происхождений. Аналогичные задачи рассматривались ранее для кристаллов на основе шарнирно-упругой молекулярной модели [5-7].

Поскольку функционал в статье [8] имеет вид аналогичный (7), то для нахождения длинноволновых стационарных решений модели

(7, 8) можно использовать вариант вариационно-разностного метода для микрополярной упругости, предложенный в этой статье. Однако, поверхностные, внутренние структуры, образующиеся при потере устойчивости в системе при критических нагрузках P , часто носят коротковолновый характер. Далее рассмотрим более подробно вопросы их моделирования на основе дискретной и континуальной моделей.

Для рассматриваемой системы, применяя метод, представленный в статье [7], реализованный с использованием пакета символьских преобразований Maple V, проанализируем двухпериодические стационарные решения.

Уравнения движения n -го узла при предположении нелинейного с кубической нелинейностью сопротивления вертикальным смещениям горизонтальных стержней при сжатии имеют вид

$$\begin{aligned} \rho SL\ddot{v}_n - \frac{a}{L^2}(v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}) + \frac{b}{2L}(\vartheta_{n+1} - \vartheta_{n-1}) + rv_n + sv_n^3 &= 0, \\ \rho I\ddot{\vartheta}_n - \frac{b}{2L}(v_{n+1} - v_{n-1}) + c(\vartheta_{n+1} - 2\vartheta_n + \vartheta_{n-1}) + b\vartheta_n &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $a = \frac{12EI}{L} - \frac{6L}{5}P$, $b = \frac{12EI}{L} - \frac{L}{5}P$, $c = \frac{2EI}{L} + \frac{L}{30}P$.

Ищем двухпериодические стационарные решения уравнений модели в виде

$$v_{2m} = -v_{2m-1} = v, \quad \vartheta_{2m} = -\vartheta_{2m-1} = \vartheta. \quad (13)$$

Подставив (13) в уравнения для ячейки периодичности из двух узлов, получаем систему нелинейных уравнений, которая имеет решения

$$v = +Z/L, \quad \vartheta = 0, \quad (14)$$

$$v = -Z/L, \quad \vartheta = 0, \quad (15)$$

где $Z = \sqrt{-\frac{1}{s} \left[rL^2 + 48 \frac{EI}{L} - \frac{24}{5} PL \right]}$.

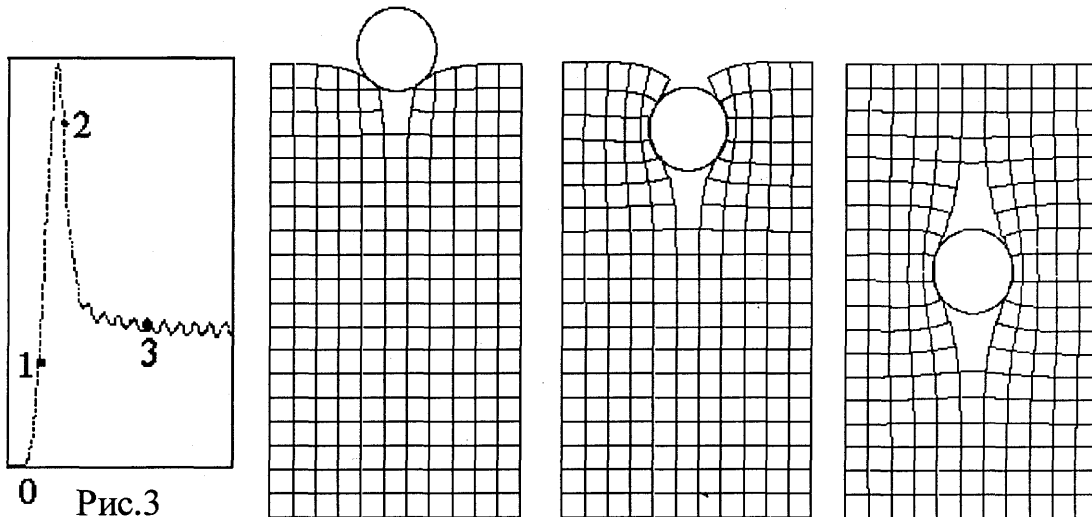
Нахождение стационарных периодических решений (14) и (15) - первый шаг в изучении статики и динамики коротковолновых кинкообразных переходных структур между этими двухпериодическими стационарными структурами. Для их численного моделирования необходимо построение аналитических приближений, для нахождения которых используются континуальные модели [6, 7]. В связи с этим необходимо сделать замечание. Однополевые континуальные уравнения, соответствующие функционалу (7), полученные континуальным переходом из уравнений дискретной модели (12), имеют вид

$$\rho SL\ddot{v} - av_{xx} + b\vartheta_x + rv + sv^3 = 0, \quad (16)$$

$$\rho l \ddot{\vartheta} - b v_x + c L^2 \vartheta_{xx} + b \vartheta = 0.$$

Эти уравнения не имеют решений, соответствующих двупериодическим решениям (13-15). То есть, нахождение переходных солитонных решений основе уравнений (16), и аналогично на основе модели (7, 8) не возможно. Для этого необходимо построение многополевых обобщенных моделей, в которых для характеристики смещения точки используются *два* поля обобщенных перемещений - кинематика среды описывается четырьмя функциями перемещений и двумя углами вращений. То есть система моделируется как *два* *взаимопроницающих континуума*. Для модели Эрингена получаем *два* *взаимопроницающих микрополярных континуума*. Построение однополевых функционалов - один из этапов разработки этих моделей.

Задача о включении. Приведем результаты вычислительных экспериментов по моделированию внедрения включения круглой формы в решетку и вычислению энергии на основе дискретной модели, которые могут быть применены к вопросам об образовании трещин, о глубокой химической адсорбции и т.д.



Жесткое включение радиуса R в начальный момент располагалось вне тела. Далее моделировался процесс квазистатического его продвижения вглубь решетки. На каждом этапе численно решались уравнения динамики решетки, построенные на основе Гамильтониана дискретной модели с введением вязкого трения для затухания колебаний. После того, как движения вызванные предыдущим перемещением включения, судя по кинетической энергии, затухали, то есть устанавливалось равновесное состояние, совершалось малое перемещение включения внутрь тела. Перед этим суммированием по элементам по формулам (5, 6) находилась энергия системы в зависимости от глубины внедрения (рис. 3). Относительно элементов предполагался их раз-

рыв при больших деформациях элементов и восстановление при сближении узлов.

Характерные результаты представлены на рис. 3, где приведена зависимость энергии от глубины. Вид системы в точках, обозначенных цифрами, также изображен на рис. 3: начальный этап проникновения "1", промежуточный этап внедрения в приповерхностном слое "2" и внутри тела, когда влияние границы уменьшается "3". В качестве характерных черт графика выделим большую энергию деформации системы в начальной приповерхностной стадии проникания в положении "2" и выход на стационарное значение при достаточно глубоком внедрении. Кроме того, отметим эффект дискретности, выражающийся в волнообразном поведении графика.

Отметим, что сходные вопросы нахождения напряженно деформированного состояния и вычисления энергии внедрения сферы в полупространство на основе классической теории упругости аналитически исследовались в работе [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Eringen A.C. J. Math. Mech., **15**, 909-923, 1965.
- [2] Sun C.T., Yang T.Y. ASME. J. Appl. Mech., **40**, 186-192, 1973.
- [3] Kim K.S., Piziali R.L. Int. J. Solids Structures, **23**, No 11, 1563-1578, 1987.
- [4] Kanatani K.I. Int. J. Engng. Sci., **17**, 409-418, 1979.
- [5] Dmitriev S.V., Shigenari T., Abe K. Phys. Rev., **В 58**, No 5, 2513-2522, 1998.
- [6] Shigenari T., Dmitriev S.V., Vasiliev A.A., Abe K. J. Phys. Soc. Japan, **68**, No 1, 117-125, 1999.
- [7] Васильев А.А., Мирошниченко А.Е., Дмитриев С.В. // Моделирование сложных систем, вып. 1, 1998, с. 7-14. Тверь: ТвГУ.
- [8] Мирошниченко А.Е., Колдунов В.А., Васильев А.А. // Моделирование сложных систем, вып. II, 1999, с. 98-102. Тверь: ТвГУ.
- [9] Федянин В.К. ДАН, т. 164, № 6, с. 1253-1255, 1965.

УДК 539.3

MODELING OF LATTICE STRUCTURAL SYSTEMS ON THE BASIS OF DISCRETE AND CONTINUAL MOMENT-TYPE MODELS

A.E.Miroshnichenko, A.A.Vasiliev
Tver State University

The effective characteristics and the variant of the continual moment type model for the analysis slowly varying displacement fields of the lattice subjected to an interior stress are deduced. Short-wave structural solutions are derived and a method for development of the continual model to its modelling is presented. The effects of quasistatic penetration of an inclusion in lattice are found by numerical experiments.