

ДИСКРЕТНЫЕ БРИЗЕРЫ

С. Флах, А. Е. Мирошниченко.

1. Введение

О существовании локальных возбуждений в сложных системах известно уже давно. Это так называемые *солитонные* решения уравнения КдВ, sine-Гордон (СГ), φ^4 и др. Среди решений СГ известны такие, как *кинк*, *анти-кинк* и в особенности *бризер*, локализованное в пространстве и периодическое во времени состояние (Рис. 1).

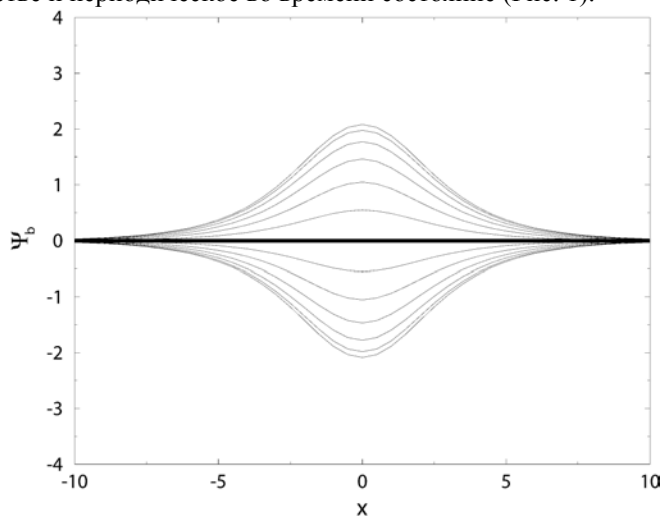


Рис.1 СГ бризер в различные моменты времени.

Однако это состояние структурно неустойчиво из-за существования неограниченного спектра малых колебаний, что характерно для подавляющего большинства континуальных уравнений (см. обсуждения в [1]).

В пространственно дискретных системах дело обстоит иначе. Рассмотрим d -мерную решетку, состоящую из упорядоченных в пространстве узлов. Расстояние между узлами фиксировано, что приводит к наличию дискретной трансляционной инвариантности. Состояние каждого узла с индексом l описывается в простейшем случае канонической парой - координатой X_l и импульсом P_l , которые являются функцией времени t . Гамильтониан H всей системы есть положительно-определённая функция всех координат и импульсов, с

дополнительным требованием, что он обладает всеми симметриями решетки. Эволюция системы описывается гамильтоновой системой уравнений $dX_l/dt = \partial H / \partial P_l$ и $dP_l/dt = -\partial H / \partial X_l$. Без потери общности можно предположить, что $H = 0$ при $X_l = P_l = 0$. Это так называемое основное состояние решетки.

Линеаризуя уравнения движения вокруг основного состояния $H = 0$, мы получаем задачу на собственные значения. В силу трансляционной инвариантности собственные вектора будут делокализованными плоскими волнами, а собственные значения Ω_q (частоты) принадлежат фоннному спектру. В силу дискретной трансляционной инвариантности, Ω_q есть периодичная функция волнового вектора q . Более того, фоннный спектр ограничен $|\Omega_q| \leq \Omega_{\max}$. Как будет показано позднее, это необходимое, но не достаточное условие существования бризеров. В зависимости от наличия или отсутствия Голдстоуновской моды, спектр Ω_q может быть акустическим (безщелевым) или оптическим (с наличием щели $|\Omega_q| \geq \Omega_{\min}$). С увеличением числа степеней свободы на узел увеличивается число фоннных зон Ω_q^i с возможными щелями между ними.

Нас будут интересовать пространственно локализованные и периодические во времени решения полной нелинейной системы уравнений движений, а именно

$$X_l(t) = X_l(t + T_b) + \lambda m_l, \quad P_l(t) = P_l(t + T_b), \quad (1)$$

$$X_{l \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad P_{l \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

где T_b - период, m_l - целые числа и λ вещественное число (для этого уравнения должны быть инвариантны под сдвигами по X_l на λ). Такое состояние называется *дискретным бризером*. В большинстве примеров $\lambda = 0$. Если $\lambda \neq 0$ и $m_l \neq 0$ для конечного числа узлов, то состояние называется *ротобризером* [1,2,3].

Если такое состояние существует, то его можно разложить в ряд Фурье по времени $X_l(t) = \sum_k A_{kl} e^{ik\omega_b t} + \lambda m_l \frac{t}{T_b}$ ($\omega_b = 2\pi / T_b$). Пространственная локализация подразумевает, что $A_{k,l \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ и

$m_{|l|>|k|} = 0$. Подставляя это разложение в уравнения движения, получаем систему связанных алгебраических уравнений для Фурье-коэффициентов. Вдали от центра бризера все Фурье-коэффициенты малы и должны стремиться к нулю. В силу малости амплитуд уравнения могут быть линеаризованы. Эта линеаризация приводит к расцеплению в k -пространстве и мы получаем для каждого k линейное уравнение для A_{kl} (связанных по l). Это уравнение содержит $k\omega_b$ как параметр. Если $k\omega_b = \Omega_q$, то соответствующие амплитуды не будут спадать в пространстве, а будут периодически изменяться вдоль решётки. Тем самым мы получаем необходимое условие существования бризера

$$k\omega_b \neq \Omega_q \quad (2)$$

- условие отсутствия резонансов гармоник бризера с фоновым спектром [4]. Для оптического спектра всегда можно найти области частот где существует бризер. Для случая акустического спектра нулевая гармоника бризера ($k = 0$) всегда находится в резонансе с $\Omega_{q=0} = 0$. Мы обсудим эту ситуацию более подробно позднее.

Как было сказано выше, отсутствие резонанса (2) - это необходимое условие существования бризера. Более детальный анализ показывает, что бризеры, как периодические орбиты, бифуркируют (отщепляются) от границ фонового спектра. Для этого необходимо присутствие нелинейных членов в уравнениях движения [1,5].

Дискретные бризеры (периодические орбиты) появляются в основном как однопараметрические семейства замкнутых траекторий. В качестве параметра семейства может выступать частота, энергия, действие и т.д. Следует заметить, что мы не требуем существования дополнительных топологических свойств Гамильтониана (таких, как наличие барьера, топологических инвариантов или интегрируемости). Для некоторых типов бризеров существует такой предел по параметру, когда бризер делокализуется и все амплитуды стремятся к нулю [1].

С помощью условия отсутствия резонанса (2), мы можем исключить существования локализованных в пространстве квази-периодических во времени состояний. В самом деле, в наипростейшем случае, мы должны удовлетворить следующему условию $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq \Omega_q$ для несоизмеримых частот ω_1, ω_2 и всевозможных пар целых чисел (k_1, k_2) . Доказательства того, что это не так, представлены в [4].

Доказательства существования дискретных бризеров приведены в [6] и [7].

Экспериментальные подтверждения существования дискретных бризеров были получены в столь разных областях, как локализация решёточных колебаний кристаллов PtCl [8], локализация света в слабо связанных волноводах с нелинейной средой [9], локализация спиновых флуктуаций в антиферромагнетиках [10], а также в системах связанных Джозефсоновских переходов, что будет обсуждено подробнее ниже.

Заметим, что бризеры могут существовать и в автономной диссипативной системе с внешней накачкой. В отличие от Гамильтонова случая периодические орбиты бризера не принадлежат однопараметрическим семействам решений, а соответствуют устойчивым предельным циклам, которые изолированы в фазовом пространстве [11].

2. Пространственная локализация бризеров

Рассмотрим Гамильтониан

$$H = \sum_l \left[\frac{1}{2} P_l^2 + V(X_l) + \sum_{l' \neq l} W_{l-l'}(X_l - X_{l'}) \right], \quad (3)$$

где $V(z)$, $W_l(z)$ неотрицательные функции и $V(0) = W_l(0) = 0$.

Если $\partial^2 V / \partial^2 z$ отлично от нуля при $z = 0$, тогда мы имеем оптический фононный спектр Ω_q , в противном случае спектр будет акустическим. На Рис.2 схематично представлены бризерные состояния для различных типов потенциалов.

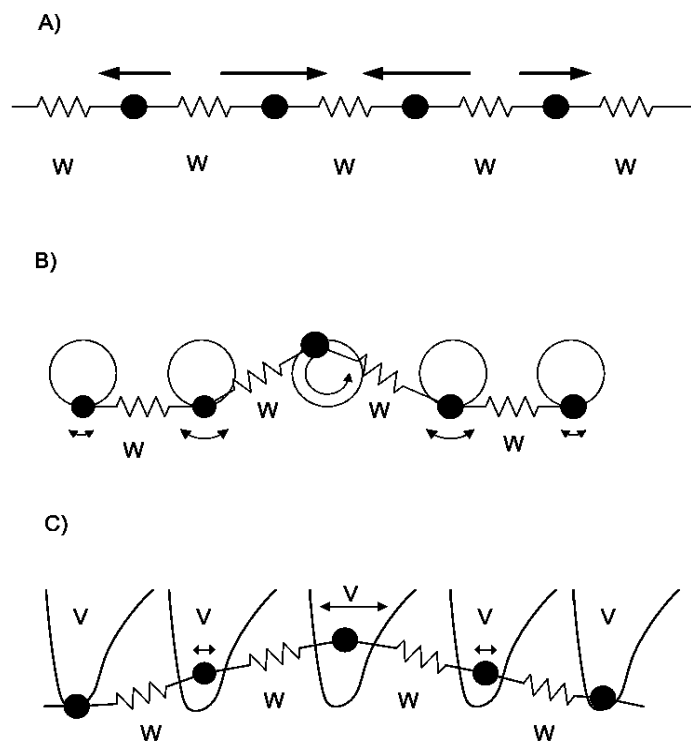


Рис.2

Схематическое распределение амплитуд бризеров для конкретных

потенциалов (3) : а) $V(z) \equiv 0$, $W(z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^4$,

б) $V(z) \equiv 0$, $W(z) = 1 - \cos(z)$,

$$c) V(z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^4, \quad V(z) = \frac{1}{2}z^2.$$

Здесь W описывает взаимодействие между ближайшими соседями.

Если условие $W_{l>l_c} = 0$ выполняется для конечной области взаимодействия (короткодействующее взаимодействие) или W_l экспоненциально убывает с l , то Ω_q^2 аналитическая функция переменной q . Для того, чтобы вычислить спадание амплитуд бризера, мы используем уравнение для Фурье-коэффициентов A_{kl} . С помощью метода функции Грина, мы получаем что

$$A_{kl} \propto \int_{\Xi} \frac{\cos(ql)}{(k\omega_b)^2 - \Omega_q^2} d^d q, \quad (4)$$

где интегрирование берется по первой зоне Бриллюэна Ξ . В силу сходимости ряда Фурье мы заключаем, что для короткодействующего взаимодействия A_{kl} экспоненциально спадают с l (Рис. 3), а показатель экспоненты зависит от k [1].

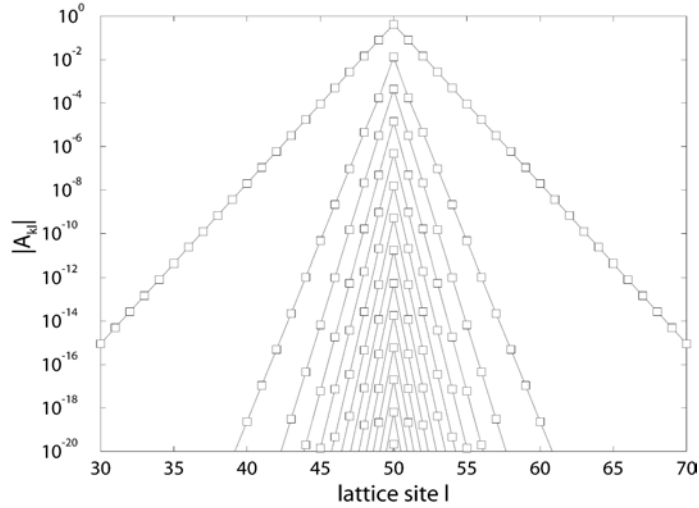


Рис. 3 Амплитуды A_{kl} как функции номера узла l . Амплитуды с одинаковыми k соединены линиями (см. [1]).

Показатель экспоненты спадаания A_{kl} (4) стремится к нулю, как только $k\omega_b$ достигает границы спектра Ω_q . Заметим, что в этом приближении линеаризация алгебраических уравнений на A_{kl} , в дали

от центра бризера, несправедлива для конечного числа $k' \neq k$ и нелинейные поправки должны быть учтены, что приводит к изменению соответствующих показателей [12].

2.1 Алгебраически спадающее взаимодействие

Рассмотрим одномерную решетку с алгебраически спадающим взаимодействием $W_l(z) \propto 1/l^s$ и $\partial^2 V / \partial^2 z |_{z=0} \neq 0$. Так как Ω_q^2 уже не будет аналитична по q , выражение (4) подразумевает, что на больших расстояниях пространственное спадание Фурье-коэффициентов будет также алгебраическим $A_{kl} \propto 1/l^s$. Однако при $s \rightarrow \infty$ взаимодействие становится короткодействующим (взаимодействие ближайших соседей). Для понимания перехода к экспоненциальному спаду в этом приделе рассмотрим случай, когда $k\omega_b$ близко к границе зоны Ω_q , которая характеризуется некоторым волновым вектором q_c . Так как подинтегральная функция (4) расходится вблизи q_c , мы можем использовать приближение стационарной фазы и разложить Ω_q^2 около q_c , учитывая только первый порядок разложения. Для случая $s > 3$ ведущий порядок зависимости Ω_q^2 от q будет пропорционален $(q - q_c)^2$. Неаналитичность скрыта в членах высшего порядка по $(q - q_c)$ и не проявляется в этом приближении. В этом случае мы получаем экспоненциальное спадание A_{kl} в пространстве. Однако, мы знаем, что асимптотическая зависимость A_{kl} по l - алгебраическая. Таким образом, мы заключаем, что для частот бризера, близких к границе спектра Ω_q , пространственная локализация будет экспоненциальна до некоторого характерного расстояния l_c , но становится алгебраической на больших расстояниях [13].

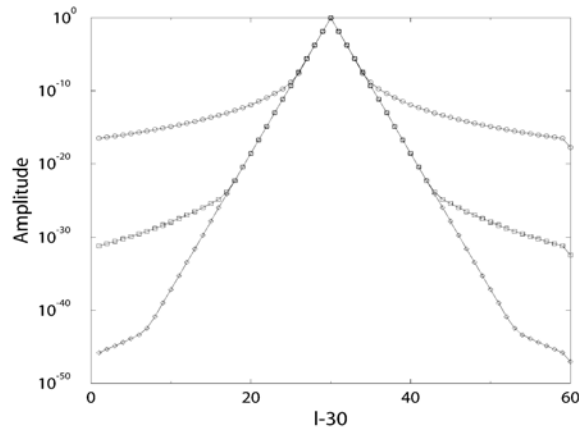


Рис. 4 Амплитуды дискретного бризера для $s = 10, 20, 30$. Чётко виден переход от экспоненциального к степенному спаду [13].

Численные расчеты подтверждают это предположение. Переходное критическое расстояние может быть оценено как

$$\frac{\ln l_c}{l_c} \approx \frac{\nu}{s}, \quad (5)$$

где ν – экспонента пространственного спада, полученного в рамках приближения стационарной фазы. Из результата (5) следует, что $l_c \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, как и ожидалось для случая короткодействующего взаимодействия. Удивительным является то, что при $\nu \rightarrow 0$ (т.е. $k\omega_b \rightarrow \Omega_{q_c}$) мы получаем $l_c \rightarrow \infty$. Это означает, что как только частота бризера (или его гармоники) подходит к границе фононной зоны Ω_q , решение становится бесконечно слабо экспоненциально локализованным во всем пространстве [13].

2.2 Наличие Голдстоуновской моды

Когда фононный спектр Ω_q содержит нуль $\Omega_{q=0} = 0$, линеаризованные уравнения вокруг основного состояния $H = 0$ содержат Голдстоуновскую моду как решение. В этом случае, нулевая гармоника бризера $k = 0$ заслуживает особого внимания. Все высшие гармоники ($k \neq 0$) могут быть проанализированы как и для случая оптического спектра. Если Гамильтониан инвариантен под пространственным отражением $X_l \rightarrow -X_l$, то периодическое во времени решение может быть также инвариантно под этим

преобразованием и $A_{kl} \equiv 0$ для четных k , включая $k = 0$. Однако если данная симметрия нарушена, все Фурье коэффициенты будут ненулевыми, включая $k = 0$.

Предположим, что Ω_q^2 аналитична по q . Так как нулевая гармоника $k = 0$ не может спадать экспоненциально на больших расстояниях от центра бризера, основная часть решения на больших расстояниях будет представлена нулевой гармоникой, медленно убывающей функцией, являющейся статической деформацией решетки. Соответствующее линейризованное уравнение будет подобно уравнению для напряжений в механике деформированного твердого тела под действием локальной деформации (ядра бризера). Напряжение в этом случае будет спадать алгебраически в пространстве. Результирующий алгебраический спад $A_{0l} \propto 1/|l|^{d-1}$ был подтвержден численно для случая $d = 2$ [14] (Рис. 5).

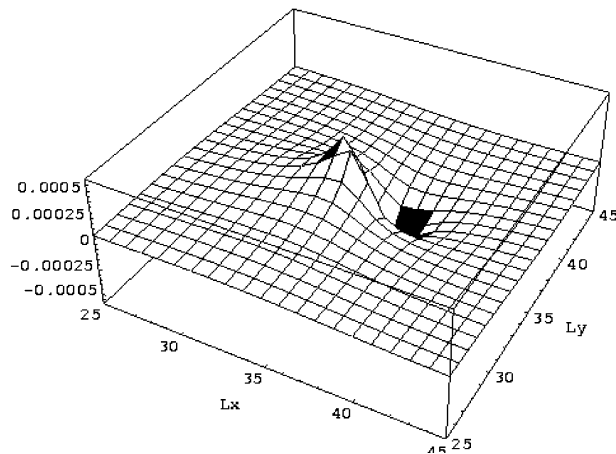


Рис. 5 Статическая деформация акустического бризера [14].

3. Порог по энергии

Прямое следствие пространственного спада бризера - это возможное наличие ненулевого порога по энергии. Напомним, что бризер представляет собой однопараметрическое семейство периодических во времени траекторий в фазовом пространстве. Наличие или отсутствие порога по энергии является физически важным. Энергия бризера может исчезнуть только в пределе нулевой амплитуды, т.е. когда ω_b достигает границ зоны Ω_q . Энергия бризера

E_b оценивается как

$$E_b \propto \int_1^{\infty} r^{d-1} F_d^2(\delta r) dr, \quad (6)$$

где плотность энергии пропорциональна $A_{1r}^2 \propto F_d^2(\delta r)$. Так как в рассматриваемом пределе пространственная локализация слабо экспоненциальная (вне зависимости от аналитических свойств Ω_{2q}^2), функция $F_d(\delta r)$ ограничена экспоненциальной функцией с экспонентой δ . Предполагая, что дисперсия вблизи границ зоны Ω_q в ведущем порядке квадратична по $(q - q_c)$, находим, что $\delta \propto |\omega_b - \Omega_{q_c}|$. В то же время, используя теорию возмущения для слабо-нелинейных плоских волн с амплитудой A и частотой ω_b , можно оценить $|\omega_b - \Omega_{q_c}| \propto A^2$. Так как бризер в данном пределе представляет собой слегка деформированную (локализованную) плоскую волну, мы приходим к следующему выражению [15]:

$$E_b \propto |\omega_b - \Omega_{q_c}|^{1-d/2}. \quad (7)$$

Этот результат подразумевает, что энергия бризера не может принимать сколь угодно малые значения для $d \geq 2$.

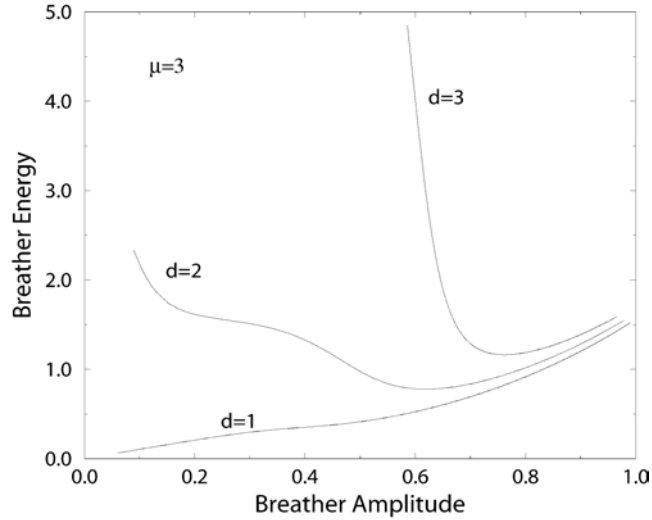


Рис. 6 Зависимость энергии бризера от амплитуды в решётках с размерностями $d = 1, 2, 3$ [15].

Следовательно, в этом случае у бризера есть ненулевое наименьшее значение энергии соответственно (Рис. 6). В некоторых случаях

ненулевой порог по энергии существует и в одномерных системах [15]. Так же неаналитичность дисперсии Ω_q^2 может приводить к данному эффекту (понижению критической размерности решетки) [13].

4. Ротобризеры в системе Джозефсоновских контактов

Система Джозефсоновских контактов является универсальным экспериментальным объектом для изучения нелинейных эффектов. Анизотропная решетка, под действием постоянного тока, представленная на рис. 7 – одна из простейших систем, в которой можно возбудить дискретные бризеры.

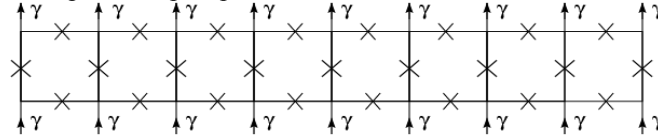


Рис.7 Система Джозефсоновских контактов. Каждый контакт обозначен как \times , γ - внешний ток, протекающий через вертикальные контакты.

Динамика одиночного Джозефсоновского контакта описывается временной эволюцией разности фаз волновых функций двух сверхпроводников, соединённых слабой связью. Такой контакт может находиться в двух устойчивых состояниях, сверхпроводящем и резистивном.

Когда через контакт протекает ток I_l , разность фаз $\varphi_l(t)$ описывается уравнением:

$$\ddot{\varphi}_l + \alpha \dot{\varphi}_l + \sin \varphi_l = I_l. \quad (8)$$

Время нормализовано к $t_0 = \sqrt{C\Phi_0/(2\pi I_c)}$, где Φ_0 – квант магнитного потока, C емкость и I_c – критический ток контакта,

$\alpha = \sqrt{\Phi_0/(2\pi I_c C R_N^2)}$ – безразмерное сопротивление контакта.

Обозначим через φ_l^v , φ_l^h и $\tilde{\varphi}_l^h$ разности фаз вертикальных, правых верхних и правых нижних контактов в l -ой ячейке. Используя закон Кирхгофа и учитывая условие квантования потока, получаем следующую систему уравнений [16]

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_l^v + \alpha \dot{\varphi}_l^v + \sin \varphi_l^v &= \gamma + (\Delta \varphi_l^v - \nabla \tilde{\varphi}_{l-1}^h + \nabla \varphi_{l-1}^h) / \beta_L \\ \ddot{\varphi}_l^h + \alpha \dot{\varphi}_l^h + \sin \varphi_l^h &= -(\varphi_l^h - \tilde{\varphi}_l^h + \nabla \varphi_l^v) / (\eta \beta_L) \\ \ddot{\tilde{\varphi}}_l^h + \alpha \dot{\tilde{\varphi}}_l^h + \sin \tilde{\varphi}_l^h &= (\varphi_l^h - \tilde{\varphi}_l^h + \nabla \varphi_l^v) / (\eta \beta_L) \end{aligned} \quad , \quad (9)$$

где γ – нормализованный постоянный ток в единицах I_{cV} ,
 $\beta_L = 2\pi L I_{cV} / \Phi_0$ - параметр дискретности, L - самоиндукция
элементарной ячейки и $\eta = I_{cH} / I_{cV}$ – параметр анизотропии, равный
отношению величин критических токов на горизонтальном и
вертикальном контактах. Разностные операторы определяются как
 $\nabla \varphi_l = \varphi_{l+1} - \varphi_l$, $\Delta \varphi_l = \varphi_{l+1} - 2\varphi_l + \varphi_{l-1}$.

Бризер (в данном случае ротобризер) соответствует состоянию,
когда конечное число контактов находится в резистивном состоянии
 $m_l \neq 0$, тогда как остальные контакты осциллируют около
сверхпроводящего состояния ($m_l = 0$). Экспериментально были
обнаружены бризеры различных типов с а) симметрией верх-вниз, б)
симметрией право-лево, в) инверсией и д) отсутствием симметрии
[17,18,19]. Каждая группа может содержать любое число вертикальных
резистивных контактов n_r .

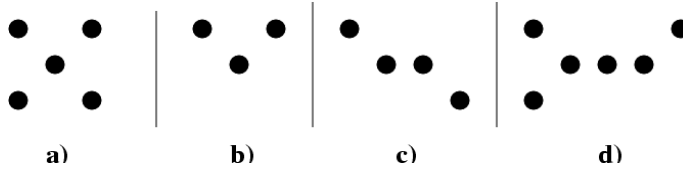


Рис. 8 Классификация бризеров по симметриям в системе контактов
Джозефсона. Черные кружочки обозначают контакты, находящиеся в
резистивном состоянии. а) симметрия *верх-вниз*, б) симметрия *право-лево*, в)
инверсия и д) отсутствием симметрии. Число вертикальных резистивных
контактов может быть любым $n_r \geq 1$.

С экспериментальной точки зрения каждый бризер характеризуется
своей вольт-амперной характеристикой. Среднее падение напряжения
через вертикальный контакт равняется $V = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} \dot{\varphi}_l^v dt$. Из законов
Кирхгофа следует, что для бризеров типа а) и д) $V = 2\omega_b$ и для
бризеров типа б) и в) $V = \omega_b$.

Усреднив уравнение движения на период бризера, можно получить
следующие приближённые значения для частот различных типов
бризеров [20].

$$\omega_b^a = \frac{n_r \gamma}{2\alpha(n_r + \eta)}, \quad \omega_b^{c,b} = \frac{n_r \gamma}{\alpha(n_r + 2\eta)}, \quad (10)$$

$$\omega_b^d = \frac{n_r \gamma}{\alpha(2n_r + 3\eta)}.$$

Благодарность

Авторы благодарят М.В. Фистуль за полезную дискуссию, а также Н.Б. Мирошниченко за помощь при оформлении работы.

Литература

1. *S. Flach, C. R. Willis*, Discrete Breathers // Phys. Rep. 1998, V. 295, P. 181
2. *S. Aubry*, Breathers in Nonlinear Lattices: Existence, Linear Stability and Quantization // Physica D, 1997, V. 103, P. 201.
3. *A. J. Sievers, J. B. Page* Dynamical Properties of Solids VII Phonon Physics The Cutting Edge // Elsevier, Amsterdam, 1995.
4. *S. Flach*, Conditions on the existence of localized excitations in nonlinear discrete systems // Phys. Rev. E 1994, V. 50, P. 3134.
5. *S. Flach*, Tangent Bifurcation of Band Edge Plane Waves, Dynamical Symmetry Breaking and Vibrational Localization // Physica D 1996, V. 91, P. 22
6. *R. S. MacKay and S. Aubry*, Proof of Existence of Breathers for Time-Reversible or Hamiltonian Networks of Weakly Coupled Oscillators // Nonlinearity 1994, V. 7, P. 1623.
7. *S. Flach*, Existence of localized excitations in nonlinear discrete systems // Phys. Rev. E 1994, V. 51, P. 1503.
8. *B. I. Swanson, J. A. Brozik, S. P. Love, G. F. Strouse, A. P. Shreve, A. R. Bishop and W.-Z. Wang*, Observation of Intrinsically Localized Modes in a Discrete Low-Dimensional Material // Phys. Rev. Lett. 1999, V. 82, P. 3288.
9. *H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd and J. S. Aitchison*, Discrete Spatial Optical Solitons in Waveguide Arrays // Phys. Rev. Lett. 1998, V. 81, P. 3383.
10. *U. T. Schwarz, L. Q. English, and A. J. Sievers*, Experimental Generation and Observation of Intrinsic Localized Spin Wave Modes in an Antiferromagnet // Phys. Rev. Lett. 1999, V. 83, P. 223.
11. *R. S MacKay, J. A. Sepulchre*, Stability of Discrete Breathers // Physica D 1998, V. 119, P.148.
12. *S. Flach*, Obtaining Breathers in Nonlinear Hamiltonian Lattices // Phys. Rev. E 1995, V. 51, P. 3579.
13. *S. Flach*, Breathers on Lattices with Long-Range Interactions // Phys. Rev. E 1998, V. 58, P. R4116.
14. *S. Flach, K. Kladko, S. Takeno*, Acoustic Breathers in Two-Dimensional Lattices // Phys. Rev. Lett. 1997, V. 79, P. 4838.

15. *S. Flach, K. Kladko, R. S. MacKay*, Energy Thresholds of Discrete Breathers in One-, Two- and Three-Dimensional Lattices // *Phys. Rev. Lett.*, 1997, V. 78, P. 1207.
16. *S. Flach and M. Spicci*, Rotobreather dynamics in underdamped Josephson junction ladders // *J. Phys.: Condens. Matter* 1999, V. 11, P. 321.
17. *E. Trias, J. J. Mazo, T. P. Orlando*, Discrete Breathers in Nonlinear Lattices: Experimental Detection in a Josephson Array // *Phys. Rev. Lett.* 2000, V. 84, P. 741
18. *P. Binder, D. Abraimov, A. V. Ustinov, S. Flach, Y. Zolotaryuk*, Observation of breathers in Josephson ladders // *Phys. Rev. Lett.* 2000, V. 84, P. 745
19. *P. Binder, D. Abraimov, A. V. Ustinov*, Diversity of discrete breathers observed in a Josephson ladder // *Phys. Rev. E* 2000, V. 62, P. 2858
20. *A.E. Miroshnichenko, S. Flach, M. V. Fistul, Y. Zolotaryuk, J.B. Page*, Breather in Josephson junction ladders: resonances and electromagnetic waves spectroscopy // *Phys. Rev. E* 2001, V. 64, P. 066601

